(Sujet commun ENS : Ulm et Cachan)

DURÉE : 4 heures

Notations et rappels

Dans tout le problème **R** désigne le corps des nombres réels.
Une fonction est dite de classe C^2 si elle est deux fois différentiable en tout point de son domaine de définition et si sa dérivée seconde y est continue. Si $u \mapsto y(u)$ est une telle fonction on notera indifféremment $\dot{y}$, y' ou $\frac{dy}{du}$ la dérivée première de y et de même pour les dérivées d'ordre supérieur : $\ddot{y}$, y'', $\frac{d^2y}{dy^2}$ etc.
Si A et B sont deux points distincts du plan, on note (AB) l'unique droite passant par A et B .
Le but du problème est de donner une condition pour que, étant données deux coniques, on puisse construire un polygone inscrit dans la première et circonscrit à la seconde. La première partie est technique et sert de fondement aux deux suivantes. La deuxième et la troisième partie traitent respectivement le cas particulier de deux cercles et le cas général.

Partie I

Soit k un réel vérifiant $0 < k < 1$. On considère l'équation différentielle

$$(E) \qquad \dot{y}^2 = (1 - y^2)(1 - k^2y^2) \ .$$

I.1 Montrer qu'il existe un intervalle ouvert I contenant 0 tel que l'équation différentielle (E) admette une unique solution de classe C^2 vérifiant $\dot{y}(0) = 1$ et $y(0) = 0$.
On notera $y(u) = sn(u; k)$ cette solution, ou encore $sn(u)$ quand aucune confusion n'est possible sur le paramètre k . Ce dernier sera appelé module de la fonction sn . On pose

$$dn(u; k) = dn(u) = \sqrt{1 - k^2 sn^2(u; k)} \qquad \text{et} \qquad cn(u; k) = cn(u) = \frac{sn(u; k)}{dn(u; k)} \ .$$

I.2 Vérifier que sn est une fonction impaire et que cn et dn sont des fonctions paires. Vérifier également les propriétés suivantes, pour tout u dans I :

1. $sn^2(u) + cn^2(u) = 1$
2. $\dot{cn}(u) = -sn(u)dn(u)$
3. $\dot{dn}(u) = -k^2 sn(u)cn(u)$.

I.3 Soit w un réel fixé. On note s_1 et s_2 respectivement les fonctions $u \mapsto sn(u)$ et $u \mapsto sn(w - u)$.

I.3.a Calculer $\dot{s_2}^2$, $\ddot{s_1}$, $\ddot{s_2}$ et montrer que, quand toutes les quantités sont définies,

$$\frac{\ddot{s_1}s_2 - \ddot{s_2}s_1}{\dot{s_1}^2 s_2^2 - \dot{s_2}^2 s_1^2} = -2k^2 \frac{s_1 s_2}{1 - k^2 s_1^2 s_2^2} \ .$$

I.3.b En déduire que $\dfrac{\dot{s}_1 s_2 - \dot{s}_2 s_1}{1 - k^2 s_1^2 s_2^2}$ ne dépend que de w .

I.3.c Montrer que, quand u, v et $u+v$ appartiennent à I ,

$$sn(u+v) = \frac{sn(u)cn(v)dn(v) + sn(v)cn(u)dn(u)}{1 - k^2 sn^2(u)sn^2(v)} .$$

On admettra que cette formule permet d'étendre les fonctions sn, cn et dn en des fonctions de classe C^2 sur $\mathbf{R}$ entier et que sn est solution de l'équation différentielle (E) sur $\mathbf{R}$.

I.4 Soit $\Phi(u,v) = \dfrac{c_1 c_2 - s_1 s_2 d_1 d_2}{1 - k^2 s_1^2 s_2^2}$ où s_i, c_i et d_i représentent respectivement les fonctions sn, cn et dn en les variables u (pour $i=1$) et v (pour $i=2$).

I.4.a Montrer que $\frac{\partial \Phi}{\partial u}$ est une fonction symétrique en les variables u et v .

I.4.b En déduire que Φ ne dépend que de $u+v$.

I.4.c Montrer que, pour tout u et v ,

$$cn(u+v) = \frac{cn(u)cn(v) - sn(u)sn(v)dn(u)dn(v)}{1 - k^2 sn^2(u)sn^2(v)} .$$

I.4.d Que se passe-t-il quand k tend vers 0, en particulier pour les formules $I.3.c$ et $I.4.c$?

I.5 Vérifier que $cn(u)cn(u+v) + dn(v)sn(u)sn(u+v) = cn(v)$ pour tout u et v .

I.6 On pose $K = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}$.

I.6.a Calculer $sn(K)$ et $cn(K)$.

I.6.b Montrer que $sn(u+K) = \dfrac{cn(u)dn(u)}{1 - k^2 sn^2(u)}$.

I.6.c Montrer que $sn(u+K) = -\dfrac{(1-k^2)sn(u)}{1 - k^2 sn^2(u)}$.

I.6.d Montrer que sn est $4K$-périodique et dresser un tableau de variation de sn sur $[0, 4K]$.

I.6.e Montrer que, pour tout ϕ dans $\mathbf{R}$, il existe un unique u dans $[0, 4K[$, noté $u = am_k(\phi)$, tel que $(\sin\phi, \cos\phi) = (sn(u;k), cn(u;k))$.

I.6.f Montrer que, pour tout α et β dans $[0,1[$

$$(\exists u \in \mathbf{R} \text{ tel que } (\alpha,\beta) = (cn(u), dn(u))) \Leftrightarrow \left(k^2 = \frac{1-\beta^2}{1-\alpha^2}\right) .$$

I.7 On se donne trois réels α, β et γ.

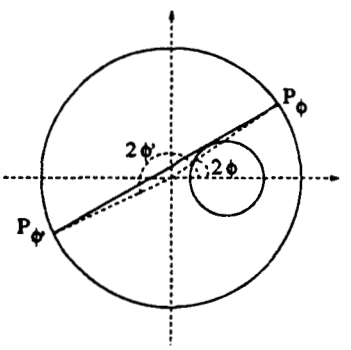
I.7.a A quelle condition l'équation, en u, $\alpha sn(u) + \beta cn(u) = \gamma$ a-t-elle au moins une solution? Dans ce cas quelles sont-elles?

I.7.b En déduire que, pour tout u, v, w dans $\mathbf{R}$,

$$(cn(u)cn(w) + dn(v)sn(u)sn(w) = cn(v)) \Leftrightarrow (w \equiv u \pm v\ [4K])\ .$$

Partie II

Soient a, r et R des réels positifs et C, C' deux cercles du plan réel euclidien dont une équation cartésienne est $x^2 + y^2 = R^2$ et $(x-a)^2 + y^2 = r^2$ respectivement. On suppose $0 \leq a \leq R - r$, i.e. que C' est "contenu" dans C. On note P_ϕ le point de C de coordonnées $(R\cos 2\phi, R\sin 2\phi)$. **Jusqu'à la question** *II.2.b*, **on suppose** a **non nul.**



II.1 Soient ϕ et ϕ' tels que P_ϕ est distinct de $P_{\phi'}$ et $(P_\phi P_{\phi'})$ est tangente à C'.

II.1.a Montrer que

$$\cos\phi\cos\phi' + \frac{R-a}{R+a}\sin\phi\sin\phi' = \frac{r}{R+a}\ .$$

II.1.b En déduire qu'il existe k et K, que l'on précisera, et u tels que

$$am_k(\phi') \equiv am_k(\phi) \pm u\ [4K]\ .$$

II.2 Soit $P = P_{\phi_0}$ un point de C. On construit des points $(P_{\phi_i})_{1\leq i\leq n}$ de sorte que $(P_{\phi_i}P_{\phi_{i+1}})$ soit tangente à C' pour tout $0 \leq i \leq n$ et $P_{\phi_{i+1}} \neq P_{\phi_i}, P_{\phi_{i-1}}$ pour tout $1 \leq i \leq n-1$.

II.2.a Montrer qu'il existe k, K et u tels que, pour tout $0 \leq i \leq n-1$

$$am_k(\phi_{i+1}) \equiv am_k(\phi_i) + u\ [4K]\ .$$

II.2.b Que se passe-t-il si a est nul?

II.2.c Montrer que la condition $P_{\phi_n} = P_{\phi_0}$ est indépendante de ϕ_0.

II.2.d En déduire la condition sur R, r et a pour qu'il existe un triangle inscrit dans C et circonscrit à C'.

II.2.e Même question que précédemment pour un quadrangle.

Partie III

On considère, dans l'espace euclidien $E = \mathbf{R}^3$, un plan affine P défini par une équation $\phi(x) = 1$ où ϕ est une forme linéaire non nulle sur E et une conique de P définie par les équations

$$C \ : \ Q(x) = 0 \qquad \& \qquad \phi(x) = 1$$

où Q est une forme quadratique non dégénérée sur E.

III.1 Soit L une droite affine de P dont les points sont les $q + tu$ où t décrit $\mathbf{R}$, q est un point fixé de P (i.e. $\phi(q) = 1$) et u un vecteur de l'espace vectoriel direction de P (i.e. $\phi(u) = 0$).

On se donne un point p de E n'appartenant pas à P et appartenant au cercle centré en q et de rayon $||u||$ dans le plan perpendiculaire à L, i.e. $p - q \perp u$, $||p - q|| = ||u||$ et $\phi(p) \neq 1$.

III.1.a A quelle condition sur y_0, λ et μ un point de la forme $y_0 + \lambda(p-q) + \mu u$ appartient-il au cône de sommet p et de base C?

III.1.b A quelles conditions sur q et u existe-t-il un plan parallèle au plan contenant p et L tel que la section du cône de sommet p et de base C par ce plan soit un cercle?

III.2 Soit C' une seconde conique dans le plan P définie par les équations

$$C' \ : \ Q'(x) = 0 \qquad \& \qquad \phi(x) = 1$$

où Q' est une forme quadratique non dégénérée sur E. Soient S et S' les matrices symétriques 3 par 3 à coefficients réels associées dans la base canonique de E aux formes quadratiques Q et Q' respectivement. On admettra pour l'instant qu'il existe un vecteur complexe, non réel, $Z = X + iY$ (et donc $X, Y \in E$) tel que ${}^tZSZ = {}^tZS'Z = 0$ (les produits sont effectués en tant que matrices à coefficients complexes) et $\phi(X) = 1$ et $\phi(Y) = 0$. Cela veut dire que Z est un point d'intersection imaginaire des coniques C et C'.
Montrer qu'on peut trouver $p \notin P$, q, $u \neq 0$ et un plan Π parallèle au plan passant par p, q et $q + u$ tels que la projection de sommet p de P sur Π (i.e. l'image d'un point x de P est l'intersection de la droite (px) avec Π) envoie C et C' sur deux cercles.

III.3 Montrer que la conclusion de la question *II.2.c* reste valide si on remplace C et C' par deux coniques d'intersection vide et que l'on fait la construction de la partie *II*.

III.4 Montrer l'existence de Z, défini en *III.2*.